

1. Enunciar la definición de medida exterior $m^*(A)$ de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Probar que si $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable entonces $m^*(A) = 0$. Construir un ejemplo de un conjunto no numerable $C \subseteq \mathbb{R}$ tal que $m^*(C) = 0$. Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son dos conjuntos cualesquiera entonces $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

Solución. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de números reales, sea (I_n) una sucesión infinita de intervalos abiertos tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, y consideremos la suma infinita de las longitudes de estos intervalos. Como las longitudes son positivas, la suma infinita está bien definida, independientemente del orden de los intervalos. Se define la *medida exterior* $m^*(A)$ como el ínfimo de tales sumas, es decir,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

Supongamos que $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos la familia numerable (I_n) de intervalos abiertos definida mediante

$$I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right).$$

Entonces $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, y además $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, de donde se sigue que $m^*(A) \leq \varepsilon$, y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se deduce que $m^*(A) = 0$.

El conjunto ternario de Cantor $C \subseteq \mathbb{R}$ se construye recursivamente del siguiente modo. Primero tomamos el intervalo $C_0 = [0, 1]$. Entonces suprimimos el tercio medio $(1/3, 2/3)$, de modo que el resultado es la unión de dos intervalos cerrados, $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Ahora volvemos a suprimir el tercio medio de cada intervalo, de modo que el resultado C_2 es la unión de cuatro intervalos cerrados. Reiterando este procedimiento obtenemos una sucesión decreciente de conjuntos (C_n) tales que C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados.

Ahora, el conjunto ternario de Cantor se define como $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Resulta que C es igual al conjunto de los números reales en el intervalo $[0, 1]$ cuya expresión en base tres sólo contiene ceros y doses. Utilizando esta caracterización del conjunto ternario de Cantor, es fácil probar que C es no numerable. Finalmente, un sencillo cálculo indica que $m^*(C) = 0$. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son dos conjuntos cualesquiera y sea $\varepsilon > 0$. Según la definición de medida exterior, existen dos sucesiones $(I_n), (J_n)$ de intervalos abiertos tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < m^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < m^*(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora consideramos la sucesión doble (I_n, J_n) y observamos que $A \cup B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup J_n$, de

modo que $m^*(A \cup B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \ell(J_n) < m^*(A) + m^*(B) + \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se deduce que $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.

2. Enunciar la definición de conjunto medible según Carathéodory. Probar que si $E, F \subseteq \mathbb{R}$ son medibles entonces $E \cup F$ también es medible. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $m^*(E) = 0$ entonces E es medible. Deducir que el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es medible.

Solución. Se dice que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es *medible* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Como siempre se tiene $m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$, resulta que E es medible si y sólo si $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Veamos que si $E, F \subseteq \mathbb{R}$ son medibles entonces $E \cup F$ es medible. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera. Como F es medible, tenemos

$$m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E^c \cap F) + m^*(A \cap E^c \cap F^c),$$

y como $A \cap (E \cup F) = [A \cap E] \cup [A \cap F \cap E^c]$, tenemos

$$m^*(A \cap [E \cup F]) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F \cap E^c).$$

Así

$$\begin{aligned} m^*(A \cap [E \cup F]) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) &\leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap F \cap E^c) + m^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ &= m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A), \end{aligned}$$

y como $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$, se sigue que $E \cup F$ es medible.

Veamos que si $m^*(E) = 0$ entonces E es medible. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ entonces $A \cap E \subseteq E$, luego $m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0$. Además $A \supseteq A \cap E^c$, de donde

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

y por lo tanto E es medible. Finalmente, el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es numerable, y por el problema anterior se tiene $m^*(\mathbb{Q}) = 0$, luego \mathbb{Q} es medible.

3. Enunciar la definición de una función medible. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con la propiedad de que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}: f(x) < \alpha\}$ es medible para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que entonces f es medible. Demostrar que si f, g son medibles entonces $f + g$ y $\min\{f, g\}$ son medibles.

Solución. Consideremos la familia \mathcal{B} de los conjuntos de Borel, es decir, la menor σ -álgebra que contiene los subconjuntos abiertos. Se dice que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si $f^{-1}(B)$ es medible para cada $B \in \mathcal{B}$.

Supongamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual el conjunto $\{x \in \mathbb{R}: f(x) < \alpha\}$ es medible para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que f es medible. Sea \mathcal{M} la familia de todos los conjuntos medibles. Sea $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B}: f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$. Estamos suponiendo que $(-\infty, \alpha) \in \mathcal{A}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Afirmamos que \mathcal{A} es una σ -álgebra. Si (A_n) es una sucesión de conjuntos en \mathcal{A} entonces $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$, luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces se tiene $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A)$ luego $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{A}$. Así \mathcal{A} es una σ -álgebra, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y \mathcal{A} contiene todos los conjuntos de la forma $(-\infty, \alpha)$. Entonces \mathcal{A} contiene a todos los conjuntos abiertos y se deduce que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, luego f es medible.

Sean f, g dos funciones medibles. Veamos que $\min\{f, g\}$ es medible. Tenemos para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ que $\{x \in \mathbb{R}: \min\{f(x), g(x)\} < \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}: f(x) < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}: g(x) < \alpha\}$ es medible por ser unión de dos conjuntos medibles.

Veamos ahora que $f + g$ es medible. Supongamos que $f(x) + g(x) < \alpha$, de modo que $f(x) < g(x) - \alpha$. La densidad de los números racionales implica que existe algún $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < r < g(x) - \alpha$. Esto prueba que

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} : f(x) < r\} \cap \{x \in \mathbb{R} : g(x) < \alpha - r\}$$

y como la unión de una familia numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible, se deduce que $f + g$ es medible.

4. Enunciar el lema de Fatou. Sea (f_n) la sucesión de funciones definidas mediante la expresión

$$f_n(x) := \begin{cases} 1/n & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n. \end{cases}$$

Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente hacia cero, calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$ y discutir el resultado a la luz del lema de Fatou.

Solución. El lema de Fatou asegura que si (f_n) es una sucesión de funciones medibles y no negativas entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Veamos que la sucesión del ejemplo converge uniformemente hacia cero. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n_0 \geq 1$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Si $n \geq n_0$ entonces $|f_n(x)| \leq 1/n < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ahora observamos que $\int_{\mathbb{R}} f_n = \frac{1}{n} \int_{-n}^n dx = 2$, lo cual indica que, en este caso, la desigualdad en el lema de Fatou es estricta.

5. Enunciar y demostrar el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada. Utilizar este teorema para calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(e^x)}{1 + nx^2} dx.$$

Solución. El teorema de Lebesgue de la convergencia dominada asegura que si g es una función integrable Lebesgue y (f_n) es una sucesión de funciones medibles tal que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ y tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ entonces

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

La demostración se basa en observar en primer lugar que cada función $g - f_n$ es medible y no negativa. Según el lema de Fatou, $\int (g - f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g - f_n)$. Ahora bien, $|f| \leq g$, luego $|f|$ es integrable y por lo tanto $\int g - \int f \leq \int g - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. Esto prueba que $\int f \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n$. A continuación observamos que cada función $g + f_n$ es medible y no negativa, y aplicando de nuevo el lema de Fatou resulta que $\int (g + f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n)$, luego $\int (g + f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g + f_n)$ y por lo tanto $\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$.

La sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{\text{sen}(e^x)}{1 + nx^2}$ converge puntualmente hacia cero y admite una mayorante integrable porque $\left| \frac{\text{sen}(e^x)}{1 + nx^2} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}$ y además $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} < \infty$. Aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(e^x)}{1 + nx^2} dx = 0$.